Batalla matemática:

(Problema 1.) Probar que para todo entero positivo n la expresión

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}$$

es periódica mixta.

(Problema 2.) Sean a, b, c, $d>0$. Prueba que una de estas desigualdades es falsa:

$$a+b<c+d, \quad (a+b)(c+d)<ab+cd, \quad (a+b)cd<ab(c+d).$$

(Problema 3.) En un triángulo agudo ABC, el punto O es el circuncentro. Los puntos E y F están en AB y AC respectivamente de forma que $\rangle BAC = \rangle EOF$. Demuestra que:

$$AE+EF+FA \geq BC.$$

(Problema 4.) a, b y c son 3 enteros distintos, y P es un polinomio con coeficientes enteros. Prueba que no puede cumplirse a la vez $P(a)=b$, $P(b)=c$ y $P(c)=a$.

(Problema 5.) Probar que en todo grafo con un número impar de vértices hay un vértice de grado par. Probar que en una reunión de 2022 personas hay dos con un número par de amigos en común.

(Problema 6.) Decimos que una función real f es *muy convexa* si para cualquier x, $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|.$$

Demuestra que ninguna función puede ser muy convexa.

(Problema 7.) Encuentra el menor n entero positivo tal que si coloreamos n escaques de un tablero 1000×1000 del mismo color entonces forzosamente habrá un trío de escaques coloreados cuyos centros formen un triángulo rectángulo con lados paralelos al borde del tablero.